#### שאלה 1:

**סעיף א':** מתקיים:

**סעיף ב':** הע"ע של המטריצות הם , כי הן מטריצות משולשיות עליונות.

**סעיף ג':** לכל מטריצה יש צורת ז'ורדן יחידה, וכיוון שהמטריצות הן בעלות צורת ז'ורדן שונה, הרי שאין **אינן** דומות.

**סעיף ד':**

עבור המטריצה , סדר הבלוק הגדול ביותר עבור הע"ע הוא 3 ועבור הע"ע הוא 2 לכן הפולינום המינימלי הוא:

עבור המטריצה , סדר הבלוק הגדול ביותר עבור הע"ע הוא 2 ועבור הע"ע הוא 3 לכן הפולינום המינימלי הוא:

**סעיף ה':** מס' הבלוקים בצורת ז'ורדן עבור כל ע"ע הוא הר"ג של הע"ע, והר"ג הוא הוא מימד המרחב העצמי הנפרש ע"י הו"ע.

במטריצה , הר"ג עבור הע"ע הוא 2 ועבור הע"ע הוא 2.

במטריצה , הר"ג עבור הע"ע הוא 3 ועבור הע"ע הוא 1.

#### שאלה 2:

**סעיף א':**

מתקיים . מחפשים מטריצה כך שיתקיים .

למטריצה יש ע"ע יחיד והוא כאשר הר"ג שלו הוא 1, כי זו מטריצת בצורת ז'ורדן עם בלוק אחד, וע"פ משפט מספר הבלוקים בצורת ז'ורדן הוא הר"ג.

לכן עבור הע"ע קיים ו"ע יחיד .

ע"פ משפט, אם ע"ע של אז הוא ע"ע של וכן קבוצת הו"ע של המטריצות זהה.

לכן הוא ע"ע של עם הו"ע , לכן הר"ג של הע"ע הוא גם 1, לכן צורת הז'ורדן של מורכבת מבלוק יחיד בגודל , לכן צורת ז'ורדן של היא:

**סעיף ב':** עבור מטריצה כללית, ע"פ אותם נימוקים של סעיף א', מתקיים כי הוא ע"ע יחיד עם ר"ג 1, לכן הוא ע"ע יחיד של עם ר"ג 1, לכן צורת ז'ורדן של היא גם בלוק יחיד:

#### שאלה 3:

**סעיף א':**

נתון כי דומה למטריצת ז'ורדן , אזי קיימת מטריצה הפיכה כך שמתקיים .

נתון , לכן אם נציב נקבל:

כלומר , כלומר דומה למטריצה , שאינה מטריצת ז'ורדן, כי יש מעל לאלכסון הראשי.

אם נפעיל שחלוף על המשוואה נקבל , כלומר גם דומה למטריצה שהיא מטריצת ז'ורדן.

אם מטריצה יוניטרית אזי יתקיים השוויון , אבל אינה מטריצת ז'ורדן ולכן נקבל כי גם אינה מטריצת ז'ורדן, בסתירה לנתון.

אם אינה יוניטרית, אזי ולכן ההוכחה גם במקרה זה אינה נכונה.

**סעיף ב':** נילפוטנטית מסדר , כלומר , לכן לכל מתקיים .

מתכונות השחלוף מתקיים , לכן לכל מתקיים , כלומר נילפוטנטית מסדר לכל היותר.

נניח בשלילה כי נילפוטנטית מסדר , אזי לכל מתקיים , כלומר , בסתירה לנתון כי נילפוטנטית מסדר .

נילפוטנטית עם אינדקס , לכן הבלוק הגדול ביותר בצורת הז'ורדן שלה הוא , וזה בדיוק סדר המטריצה , לכן בצורת הז'ורדן יש בלוק יחיד, כלומר דומה למטריצת ז'ורדן:

קיבלנו כי גם נילפוטנטית עם אינדקס , לכן הבלוק הגדול ביותר בצורת הז'ורדן שלה הוא , וזה בדיוק סדר המטריצה , לכן גם היא דומה לאותה מטריצת ז'ורדן כמו המטריצה , לכן מטרנזיטיביות בדמיון נקבל כי דומות.

**סעיף ג':** תהי אזי היא דומה למטריצת ז'ורדן , כי כל הע"ע של נמצאים בשדה .

אם דומה ל- אז דומה ל-. נראה כי דומות ולכן מטרנזיטיביות נקבל כי דומות.

מטריצת הז'ורדן , מורכב מסדרה של בלוקים, נסמנם , כאשר כל בלוק הוא מסדר כלשהו ומבנהו:

כלומר באלכסון של הבלוק נמצא הע"ע ובאלכסון מעליו נמצאות אחדות.

נסמן מטריצה נילפוטנטית עם אינדקס נילפוטנטיות , אזי מתקיים:

לכן מתקיים , וכן מתקיים .

*מקיימת את תנאי סעיף ב', לכן דומה למטריצה , כלומר קיימת מטריצה הפיכה כך שמתקיים .*

*כמו כן, אלכסונית, לכן מתקיים עבור אותה מטריצה : .*

*לכן מתקיים:*

כלומר קיבלנו , כלומר דומה למטריצה .

מבנה מטריצת הז'ורדן הוא:

לכן מבנה המטריצה הוא:

*נסמן ונקבל , כלומר דומות, לכן דומות כנדרש.*

#### שאלה 4:

***סעיף א':*** *עבור המטריצה .*

*נמצא תחילה ע"ע וו"ע.*

לכן למטריצה יש ע"ע יחיד והוא עם ריבוי אלגברי 4.

נפתור את המע' על מנת למצוא ו"ע:

לכן , לכן נקבל:

כלומר קיבלנו 2 ו"ע: .

קיבלנו כי הר"ג של הוא 2, לכן בצורת ז'ורדן יהיו 2 בלוקים.

נפתור את מע' המשוואות על מנת למצוא את הסדר של כל בלוק.

נפתור :

לכן , לכן נקבל:

נפתור :

לכן , לכן נקבל:

נקבע ונקבל:

נפתור :

נקבל ומכאן סתירה, לכן למע' אין פתרון, לכן הבלוק המתאים ל- הוא בגודל .

אם הבלוק המתאים ל- הוא בגודל , אז הבלוק המתאים ל- הוא בהכרח בגודל .

לכן צורת הז'ורדן היא:

מפתרון מע' המשוואות נקבל כי הקבוצה היא בסיס מז'רדן.

*לכן המטריצה מקיימת .*

*כלומר , לכן נגדיר .*

***סעיף ב':*** *עבור המטריצה .*

*ניתן לראות כי המטריצה מורכב למעשה מ-2 תתי-מטריצות: בגודל , בגודל ,* כלומר .

נמצא את צורת ז'ורדן של כל אחת מתתי-המטריצות.

עבור :

זוהי מטריצה משולשית תחתונה, לכן יש ע"ע יחיד עם ר"א 3.

נפתור את המע' :

נקבל , לכן:

כלומר יש ו"ע יחיד, כלומר הר"ג הוא 1, לכן יש בלוק יחיד במטריצת הז'ורדן, לכן:

עבור :

זוהי מטריצה משולשית תחתונה, לכן יש ע"ע יחיד עם ר"א 5.

נפתור את המע' :

נקבל , לכן:

קיבלנו כי הר"ג הוא 2, לכן בצורת ז'ורדן יש 2 בלוקים.

נקבע ונפתור :

נקבל ומכאן סתירה, כלומר למע' אין פתרון, לכן לו"ע מתאים בלוק בגודל , לכן צורת הז'ורדן:

ולכן צורת הז'ורדן של :